

29/03/2017

Ασκ 17 Έστω $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \neq 0$, $\langle \vec{a}, \vec{\gamma} \rangle = 0$

• Να βρεθεί $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{a} \times \vec{u} = \vec{\gamma} \quad \text{και} \quad \langle \vec{b}, \vec{u} \rangle = \lambda$$

• Να γίνει εναρμόδιση

• Να γίνει εφαρμογή $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (-1, 4, 2)$, $\vec{\gamma} = (3, 1, -5)$ $\lambda = 5$

Λύση • Γνωρίζουμε ότι $\vec{a} \times \vec{u} = \vec{\gamma} \xRightarrow[\text{αφ' όσον}]{\text{πολλαπλα} \atop \text{εξ. } \vec{b}}$ $\vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{u}) = \vec{b} \times \vec{\gamma} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\vec{b} \cdot \vec{u}) \vec{a} - (\vec{b} \cdot \vec{a}) \vec{u} = \vec{b} \times \vec{\gamma} \Rightarrow -(\vec{b} \cdot \vec{a}) \vec{u} = \vec{b} \times \vec{\gamma} - \lambda \vec{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \frac{(\vec{b} \times \vec{\gamma}) - (\lambda \vec{a})}{-(\vec{b} \cdot \vec{a})} = \frac{\lambda \vec{a} - \vec{b} \times \vec{\gamma}}{\vec{a} \cdot \vec{b}}$$

• Επαλήθευση $\vec{a} \times \left(\frac{\lambda \vec{a} - \vec{b} \times \vec{\gamma}}{\vec{a} \cdot \vec{b}} \right) = \frac{1}{\vec{a} \cdot \vec{b}} \left(\vec{a} \times \lambda \vec{a} - \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{\gamma}) \right)$

$$= -\frac{1}{\vec{a} \cdot \vec{b}} \left((\vec{a} \cdot \vec{\gamma}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{\gamma} \right) = \vec{\gamma}$$

$$\vec{b} \cdot \left(\frac{\lambda \vec{a} - \vec{b} \times \vec{\gamma}}{\vec{a} \cdot \vec{b}} \right) = \frac{1}{\vec{a} \cdot \vec{b}} \left(\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{\gamma}) \right) = \lambda$$

μεκτο

$$\vec{u} = \frac{\lambda \vec{a} - \vec{b} \times \vec{\gamma}}{\vec{a} \cdot \vec{b}}$$

$$\vec{b} \times \vec{\gamma} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = (-22, 1, -13)$$

$$\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1,0,0 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{pmatrix} 0,1,0 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{pmatrix} 0,0,1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \lambda=5$$

$$\vec{\alpha} \vec{\beta}' = (1, 2, 1) (-1, 4, 2) = 9$$

$$\vec{u} = \frac{\lambda \vec{\alpha} - \vec{\beta}' \vec{\chi}'}{\vec{\alpha} \vec{\beta}} = \frac{5(1, 2, 1) - (-22, 1, -13)}{9}$$

ΕΠΙΠΕΔΟ

Ένα επίπεδο προδιορίζεται πλήρως αν γνωρίζουμε

i) Ένα σημείο του και δύο μη συγχρημικά (μη γραμμ. εξαρτ.) διανύσματα παράλληλα στο επίπεδο.

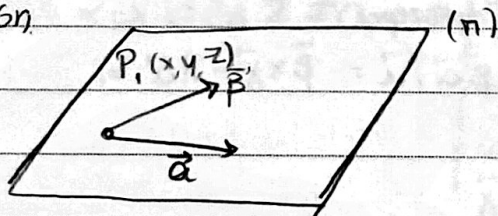
ii) Δύο σημεία του και ένα διάνυσμα παράλληλο στο επίπεδο και μη συγχρημικό με το διάνυσμα που ορίζουν τα δύο σημεία.

iii) Τρία σημεία του μη συνευθειακά

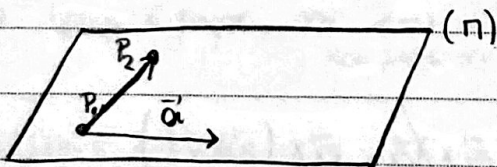
iv) Ένα σημείο του και ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο.

Επεξηγήσεις

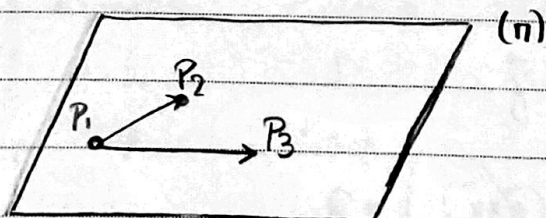
Πα i)



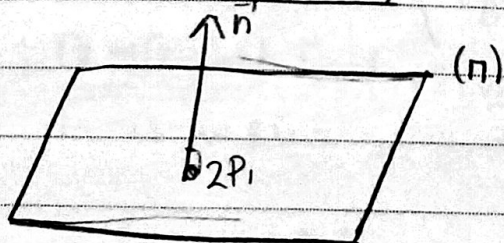
ii)

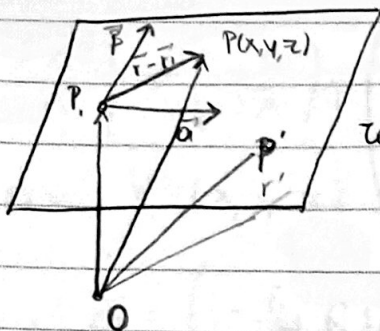


iii)



iv)





τα $\vec{r}_1, \vec{r}$ είναι τα
διανύσματα θέσης
των P, P_1

$$\begin{aligned} \vec{P_1P} &= \vec{OP} - \vec{OP_1} = \vec{r} - \vec{r}_1 \\ \text{παρατηρ. ότι τα } \vec{a}, \vec{b}, \vec{P_1P} & \\ \text{είναι στο ίδιο επίπεδο} & \\ \text{Πρόταση} & \Rightarrow \text{Είναι Γραμμ. Εξαρτημένα} \\ \Rightarrow \vec{P_1P} &= \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \\ \Rightarrow \vec{r} &= \vec{r}_1 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (1) \end{aligned}$$

*για τα διαφορά λ, μ λαμβάνουμε όλα τα διανύσματα θέσης των σημείων του επιπέδου.

2 Ορθοκανονικό σύστημα αξόνων

$$\vec{OP} = (x-0, y-0, z-0)$$

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y = y_1 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z = z_1 + \lambda a_3 + \mu b_3 \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (2)$$

παραμετρικές εξισώσεις επιπέδου

για τις διαφορές τιμές λ, μ

$\lambda a, \mu b$ τα σημεία επιπέδου

Με απαλοιφή των λ, μ από την 2

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \text{Αναλυτική} \\ \text{εξίσωση επιπέδου} \\ \text{(n)} \end{array} \left| \begin{array}{ccc} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \right| = 0$$

Αν μου δώσει δύο συγγραμ. διαν., δεν μπορώ να ορίσω επίπεδο

$$\vec{a}' = \lambda \vec{b}'$$

$$\text{Αρα γίνεται} \left| \begin{array}{ccc} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \lambda b_1 & \lambda b_2 & \lambda b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \right| = \lambda \left| \begin{array}{ccc} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \right|$$

$$\text{Λαμβάνει μορφή: } Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\mu \in (A, B, C) \neq (0, 0, 0)$$

$\Rightarrow$ (2) Πως φέρουμε ότι το σύστημα δεν είναι αδύνατο

Για να έχει λύση, πρέπει να $\exists$ ταλάνιστρον 1 οριζοντιο $\neq 0$ (ή 2 διγίγους $\neq 0$)

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, A = \vec{a} \times \vec{b} \neq 0$$

$$\left(\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \right)$$

Είναι ανα δύο οι συντελεστές του λ, μ

Μια τουλάχιστον είναι $\neq 0$

$\Rightarrow \exists$ 1 συνάρτηση επιβίβαση που θα μας δώσει μια επίλυση

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

Αυτό προκύπτει και παρατηρώντας ότι τα διανύσματα $\vec{r}-\vec{r}_1, \vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι συνεπίεδα
 $\Rightarrow$ Γραμμικά εξαρτημένα $\Rightarrow (\vec{r}-\vec{r}_1, \vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$

$$\begin{matrix} \vec{r}_1 - \vec{r}_i \rightarrow \\ \vec{\alpha}' \rightarrow \\ \vec{\beta}' \rightarrow \end{matrix} \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \text{Προκύπτει η } (*)$$

ΣΧΟΛΙΟ Είδαμε ότι ένα επίπεδο έχει τη μορφή
 $Ax + By + Cz + D = 0$

Αντίστροφα κάθε επίλυση αυτής της μορφής
 παριστάνει επίπεδο αφού:

$(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ χωρίς βλάβη γενικότητας
 Έστω $A \neq 0 \Rightarrow$

$$x = \left(-\frac{B}{A} \right) y + \left(-\frac{C}{A} \right) z + \left(-\frac{D}{A} \right) =$$

$$= \left(-\frac{A}{A}\right)x + \left(-\frac{B}{A}\right)y + \left(-\frac{C}{A}\right)z$$

$$\text{αν } \vec{r} = (x, y, z) \Rightarrow \vec{r}_1 = \left(-\frac{A}{A}, 0, 0\right)$$

$$\vec{\alpha} = \left(-\frac{B}{A}, 1, 0\right)$$

$$\vec{\beta} = \left(-\frac{C}{A}, 0, 1\right)$$

πχ Να γίνει εφαρμογή των παραπάνω (εύρεση (π))

αν αυτό διέρχεται από $P_0(1, 2, 3)$ και είναι παράλληλο προς

$$\vec{\alpha} = (1, 1, 1), \vec{\beta} = (1, -1, 1)$$

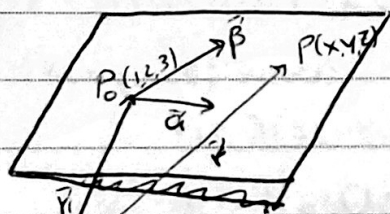
ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

→ Ελέγχουμε ότι τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ γραμμ. ανεξάρτητα $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1}$
 Παρατηρούμε ότι $\exists$ μια ορίζουσα $\neq 0$ άρα και τα δύο Γ.Α

Προφανώς είναι Γραμμ. Ανεξ.

$$\text{Διαν. εξίσωση επιπέδου: } \vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda \vec{\alpha} + \mu \vec{\beta} = (1, 2, 3) + \lambda(1, 1, 1) + \mu(1, -1, 1)$$



Παραμετρ. εξίσωση $\vec{r} = (x, y, z)$

Παραμ. εξίσωση
 εστι $\vec{OP} = \vec{r} = (x-0, y-0, z-0)$

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + \lambda \cdot 1 + \mu \cdot \beta_1 \\ y &= y_1 + \lambda + \mu \beta_2 \\ z &= z_1 + \lambda + \mu \beta_3 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} x &= x_1 + \lambda + \mu \\ y &= y_1 + \lambda - \mu \\ z &= z_1 + \lambda + \mu \end{aligned} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

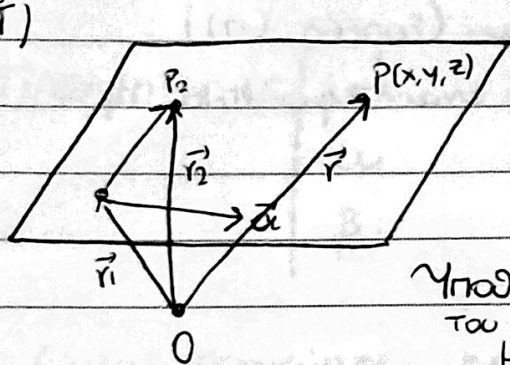
Αναλυτική Εξίσωση επιπέδου $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$(x-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (z-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(x-1) \cdot 2 - (y-2) \cdot 0 + (z-3)(-2) = 0 \Rightarrow$$

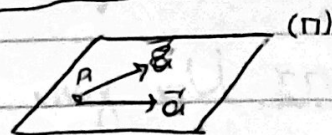
$$2x - 2 - 2z + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{x - z + 2 = 0}$$

Από
ii)



(n)

$$\vec{P_1 P_2} = \vec{OP_2} - \vec{OP_1} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$



$$\vec{r}' = \vec{r}_1 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$$

Υποθέσεις: Ορίσμος επιπέδου που ορίζεται από δύο σημεία του και διάνυσμα παραλλήλο στο επίπεδο και μη συγχρ. με διάνυσμα που ορίσων τα σημεία.

Διαν. Εξίσωση επιπέδου $\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda \vec{a} + \mu \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$

$$P_1(x_1, y_1, z_1) \quad \vec{P_1 P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$P_2(x_2, y_2, z_2)$$

Παραμ. Εξισώσεις στην ii)

$$x = x_1 + \lambda a_1 + \mu (x_2 - x_1)$$

$$y = y_1 + \lambda a_2 + \mu (y_2 - y_1)$$

$$z = z_1 + \lambda a_3 + \mu (z_2 - z_1)$$

Αναλυτική εξίσωση ii)

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0 \dots \dots$$

ii) Η αναλυτική εξίσωση επιπέδου που ορίζεται από τα σημεία $P_1(1, -1, 2)$, $P_2(2, 2, 2)$ και είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $\vec{a} = (3, 4, 5)$ είναι:
 Το $P_1P_2 = (2-1, 2-(-1), 2-2) = (1, 3, 0)$ είναι ΓΑ με το $\vec{a} = (3, 4, 5)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{P_1} \\ \vec{P_1P_2} \\ \vec{a} \end{matrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y-(-1) & z-2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 = \dots$$

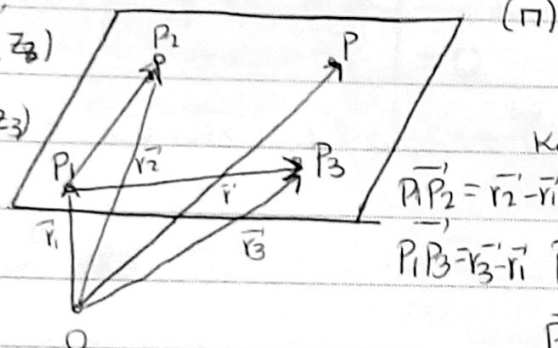
$$= 3x - y - z - 2 = 0$$

iii) Επίπεδο που ορίζεται από τρία μη συνευθειακά σημεία

$P_1(x_1, y_1, z_1)$

$P_2(x_2, y_2, z_2)$

$P_3(x_3, y_3, z_3)$



στην ουσία έχουμε σημείο $P_1(x_1, y_1, z_1)$

και δύο διανύσματα $\vec{P_1P_2} (= \vec{\alpha})$

$\vec{P_1P_3} (= \vec{\beta})$

$$\vec{P_1P_2} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$

$$\vec{P_1P_3} = \vec{r_3} - \vec{r_1}$$

$$\vec{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\vec{P_1P_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

$$\vec{r} = \vec{r_1} + \lambda(\vec{r_2} - \vec{r_1}) + \mu(\vec{r_3} - \vec{r_1})$$

Παραμ. εξισώσεις στην iii)

$$x = x_1 + \lambda(x_3 - x_1) + \mu(x_2 - x_1)$$

$$y = y_1 + \lambda(y_3 - y_1) + \mu(y_2 - y_1)$$

$$z = z_1 + \lambda(z_3 - z_1) + \mu(z_2 - z_1)$$

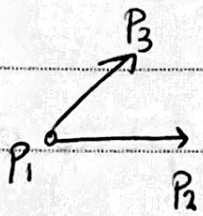
Αναλυτική εξίσωση (iii)

$$\vec{P_1P_2} \rightarrow \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Εφαρμογή Προσδιορισμός αναλ. Εγ16. Επινέδου $P_1(1, 2, -1)$

$P_2(3, 4, 5)$

$P_3(2, 3, 1)$



$$\vec{P_1P_2} = (2, 2, 6)$$

$$\vec{P_1P_3} = (1, 1, 2)$$

ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

(*) Προφανώς τα $\vec{P_1P_2}, \vec{P_1P_3}$ Γ.Α $\Rightarrow$ ορίζουν επινέδο

$$\boxed{x - y + 1 = 0}$$